# Лабораторная работа

# Тема:Многокритериальные задачи принятия решений в условиях определенности

## 2.1 Задачи векторной оптимизации

В жизни целенаправленная деятельность человека устроена так, что приходится учитывать не одну, а сразу несколько целей. Так, при транспортировке грузов возникают желания организовать перевозку быстро, дешево, надежно. Три сформулированные целевые установки приводят по отдельности к различным трем решениям, а так как цели сами по себе противоречивы, то возникают определенные трудности сравнения этих решений, выбора наилучшего в определенном смысле или какого-то компромиссного. В данном разделе рассмотрим подходы количественного обоснования решения многокритериальных задач оптимизации.

Вернемся к задаче определения плана выпуска продукции, рассмотренной в первой части пособия. Напомним постановку задачи.

Пусть мебельная фабрика изготавливает два вида продуктов: столы и шкафы. Для их производства используется три вида ресурсов (пиломатериал, шурупы, краска). Будем считать, что месячные запасы ресурсов ограничены: пиломатериал — величиной  (), шурупы —  (кг), краска —  (кг). Расходы соответствующих ресурсов на изготовление одной единицы соответствующих продуктов известны и задаются таблицей (матрицей) . Прибыль (доход) от выпуска единицы соответствующей продукции задана: для стола она равна  (руб./шт.), для шкафа —  (руб./шт.). Требуется определить план выпуска продукции каждого вида, максимизирующий доход фабрики.

Кроме этой цели, добавим еще одну. Допустим, что нам нужно максимизировать выпуск продукта первого типа — столов, которые идут не на продажу, а для своих нужд. Таким образом, теперь модель задачи будет выглядить так:

 — критерий первого вида; (2.1)

 — критерий второго вида; (2.2)

при ограничениях:

, (2.3)

 (2.4)

где  — количество производимых продуктов *j-*го типа (соответственно столов и шкафов), *j =*1,2;

 — нормативная матрица затрат *i*-го вида сырья на 1 единицу *j*-го типа продукта;

 — ограничение на *i*-й вид сырья (пиломатериал, шурупы, краска), *j =*1,2,3.

Вернемся к графическому способу решения задачи в отдельности по каждому из критериев (рис. 2.1).



Рис. 2.1 — Графическое решение задачи

Если решать задачу только с учетом критерия первого вида , то решение получим в точке  = (517,156), а значение критерия рублей. Если решать задачу без учета критерия первого вида, а только с учетом критерия второго вида, то получим решение в точке , а значение критерия  700 столов.

Одновременный учет двух критериев приведет к решению, которое лежит на отрезке между точками (решениями)  и . Множество решений на отрезке между  и  называют множеством решений, оптимальных по Парето (оно же компромиссное множество, недоминируемое, эффективное). Множество компромиссных решений обладает свойством противоречивости: улучшение качества решений по одним критериям вызывает ухудшение качества других (рис. 2.2).



Рис. 2.2 — Компромиссное множество решений

Вообще говоря, в многокритериальных задачах принятия решений понятие оптимальности плана теряется, так как не существует такого плана, который доставлял бы одновременно экстремальное значение отдельным критериям. Это обстоятель­ство и является причиной того, что методы решения много­критериальных задач предусматривают в том или ином виде учет мнения лица, принимающего решение. Чтобы выбрать из области Парето лучшие решения, ЛПР обязан ввести соответствующие принципы выбора компромиссного решения, приводящие к тому или иному методу решения задачи. Рассмотрим наиболее часто употребляемые методы решения многокритериальных задач.

Сведение многокритериальной задачи к однокритериальной

Идея метода состоит в том, чтобы два и более критериев представить в виде единого суперкритерия, т.е. скалярной функции, зависящей от локальных критериев:

.

Вид функции  определяется тем, как ЛПР представляет вклад каждого критерия  в суперкритерий. В силу того, что критерии  могут измеряться в различных единицах измерения и иметь различные несоизмеримые масштабы, сравнивать решения в таких условиях зачастую невозможно. Возникает проблема приведения их масштабов к единому, обычно безразмерному масштабу измерения (проблема нормализации). А так как обычно локальные критерии имеют относительно друг друга различную важность, относительный вклад в суперкритерий, то это следует учитывать при выборе лучшего решения (проблема учета приоритета критериев).

Наибольшее распространение получил подход определения глобального критерия (суперкритерия) в виде взвешенной суммы критериев

,

где  — отнормированное значение *i*-го критерия;

 — коэффициент относительной важности i-го критерия (весовой коэффициент);

.

Весовой коэффициент определяется экспертными методами. Значение  для каждого из критериев, как правило, есть безразмерная величина и находится в интервале  Наиболее простым способом нормализации [7] является получение оценок по формуле , где  — идеальное (возможно максимальное) значение *i*-го критерия.

Для решения нашей двухкритериальной задачи ЛПР должен установить значения весовых коэффициентов  и , чтобы , а также учесть нормализацию критериев  и , а затем построить единую целевую функцию и решить задачу: , при ограничениях ; .

Если , то получим решение с учетом первого критерия, если  — решение с учетом второго критерия. Глубокое знание реальной проблемы, накопленный опыт могут позволить ЛПР выбрать , чтобы, решив оптимизационную задачу с единственной целевой функцией , он получил бы удовлетворяющее его решение исходной задачи с двумя целевыми функциями.

Выделение главного критерия

Допустим, что среди критериев  и  ЛПР удается выбрать основной. Пусть это будет критерий  Допустим, что ЛПР желает получить доход от реализации продукции не ниже определенной им величины . Тогда можно решать задачу вида: , при ограничениях:

;

 — ограничение по критерию ;

.

Метод последовательных уступок

Предположим, что частные критерии упорядочены в порядке убывания их важности . Решая задачу по критерию , найдем решение . Если ЛПР может сделать некоторую уступку по первому критерию  в объеме  (пусть  = 5500), чтобы улучшить решение по следующему критерию  (рис. 3.32), то это приводит к задаче поиска решения по второму критерию с уступкой по первому:  при ограничениях:

;

 — уступка по первому критерию;

.

И так далее для других критериев. На последнем шаге решается задача поиска решения по *n*-му критерию с учетом уступок по  наиболее важным критериям, и решение этой задачи принимается в качестве решения первоначальной.

Метод целевой точки

Метод целевой точки (опорной, идеальной) базируется на задании по каждому критерию так называемых уровней притязаний [3, 4,7] в виде желаемых значений критериев . Поскольку оценки  задаются без точного знания структуры множества допустимых решений, то целевая точка может оказаться как внутри, так и вне области допустимых решений. Наиболее близкая точка решения к целевой будет определять наилучшее решение. В качестве меры близости между решением и целевой точкой, т.е. между векторами   предлагается использовать различные расстояния [4], в том числе расстояние типа

,

где  — коэффициент относительной важности критерия 

Тогда модель поиска компромиссного решения для рассматриваемой задачи методом целевой точки будет иметь вид

,

при ограничениях (3.52) и (3.53).

На базе рассмотренных методов поиска решения многокритериальных задач созданы различные человеко-машинные эвристические процедуры [28], суть которых заключается в распределении ролей между ЛПР и ЭВМ. ЛПР готовит информацию, необходимую для моделирования, ЭВМ осуществляет расчет и выдает решение ЛПР для его анализа. При необходимости ЛПР сообщает сведения для корректировки решения в виде оценок относительной важности критериев, уступок по критериям, коэффициентов нормализации и другие.

***Варианты для многокритериальной ЗПР***

***1.***

Для приготовления комбикорма совхоз может закупить зерно 4-х сортов Ki , отличающихся друг от друга содержанием питательных компонентов Cj (j=1,..,5).Для обеспечения нормального питания скота в течение планируемого периода комбикорм должен содержать не менее Bj питательного компонента j-го типа. Одна тонна зерна i-го типа стоит ri рублей и содержит aij единиц питательного компонента j-го типа (табл.4.3). Складские помещения позволяют хранить не более А тонн зерна (для варианта 5: А=2800, для варианта 6: А=4400). Определить план закупки зерна, чтобы обеспечить максимальную питательность комбикорма при минимальных затратах с учетом емкости складских помещений.

Исходные данные к задаче Таблица1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Сорт зерна Ki | С1 | С2 | С3 | С4 | С5 | Цена ri |
| К1 | 2 | 1 | 5 | 0.6 | 0.01 | 40 |
| К2 | 3 | 1 | 3 | 0.25 | 0.02 | 30 |
| К3 | 7 | 0 | 0 | 1.00 | 0.1 | 28 |
| К4 | 9 | 3 | 6 | 1.5 | 0.5 | 35 |
| К5 | 4 | 2 | 1 | 0.5 | 0.1 | 44 |
| Содержание Bj | 2500 | 300 | 1000 | 712 | 100 |

***Вариант 1: к1, к2, к3***

***Вариант 2: к2, к3, к4***

***Вариант 3: к3, к4, к5***

***Вариант 4: к4, к5, к1***

***2.***

Совхоз, имеющий посевную площадь 5000 га, выращивает3 культуры Кi. Весь год можно разбить на 5 периодов Pj, отличающихся друг от друга потребностями в рабочей силе для выполнения сельскохозяйственных работ. В период Pj совхоз располагает рабочей силой в количестве bj человек, из которых dj человек могут быть в случае необходимости обеспечены работой, не связанной непосредственно с сельским хозяйством, а aij человек должны быть заняты на обработке 1 га посевной площади, занятой культурой Ki. Прибыль от i-й культуры, приходящаяся на 1 га посевной площади, равна ci рублей, плановое задание по производству i-й культуры составляет qi центнеров, а ее урожайность hi центнеров с га (табл.2).

Найти распределение площади под эти культуры, обеспечивающее максимум прибыли при выполнении всех плановых заданий и полной загрузке рабочей силы в течение года.

Исходные данные к задаче 2 Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Культура | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | ci | qi | hi |
| K1 | 0.25 | 2 | 2 | 1.4 | 1.3 | 300 | 11600 | 16 |
| K2 | 0.2 | 1.8 | 1 | 0.8 | 0.6 | 270 | 15000 | 24 |
| К3 | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 1.3 | 2 | 150 | 40000 | 40 |
| К4 | 0.1 | 0.5 | 2 | 1.8 | 0.4 | 220 | 18000 | 30 |
| bj | 3200 | 5500 | 5600 | 6500 | 9200 |
| dj | 2800 | 2100 | 200 | 1800 | 2400 |

***Вариант 5: к1, к2, к3***

***Вариант 6: к2, к3, к4***

***Вариант 7: к4, к1, к2***

***Вариант 8: к3, к1, к4***

***3.***

Деревообрабатывающая фабрика получает m типов лесоматериалов Hi в количестве bi куб.м в месяц. Из этих материалов изготавливается n ви

дов фанеры Sj. На производство 1 кв.м фанеры вида Sj идет qij куб.м

материала Hi. По плану в месяц должно производится не менее Pj кв.м

фанеры вида Sj. Составить план производства фанеры на месяц, обеспечивающий фабрике максимальную прибыль, если лесоматериалы обходятся фабрике в ci руб./куб.м, расходы на производство 1 кв.м фанеры Sj составляют vj рублей, а реализуется эта фанера по цене rj руб./кв.м.

Исходные данные к задаче 3 Таблица 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | bi | ci |
| H1 | 0.02 | 0 | 0.03 | 0.08 | 0.02 | 150 | 2.6 |
| H2 | 0.04 | 0.1 | 0.12 | 0 | 0.01 | 200 | 2.5 |
| H3 | 0 | 0.05 | 0.02 | 0.04 | 0.04 | 100 | 1.5 |
| H4 | 0.1 | 0.04 | 0 | 0 | 0.08 | 130 | 1.4 |
| H5 | 0.02 | 0 | 0.01 | 0 | 0 | 170 | 1.9 |
| Pj | 150 | 350 | 100 | 400 | 150 |
| vj | 0.5 | 0.7 | 0.4 | 0.8 | 0.9 |
| rj | 3 | 3.5 | 4.1 | 3.2 | 4.5 |

***Вариант 9: h1, h2, h3***

***Вариант 10: h2, h3, h4***

***Вариант 11: h3, h4, h5***

***Вариант12: h4, h5, h1***

***Вариант 13: h2, h4, h5***

***Вариант14: h3, h5, h1***